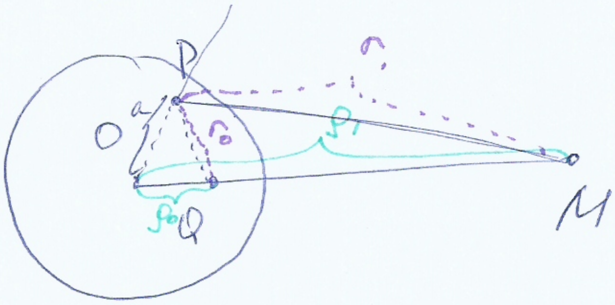
№ 1

Рассуждения почти такие же как в случае сферы $n=2$, но для трехмерных координат:

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_0} + V(P,Q) \qquad r_0 = \rho(P,Q)$$



$$\begin{cases} \Delta V(P) = 0 & \text{в } \Omega \\ V(P,Q)\Big|_{P\in S} = -\frac{1}{4\pi r_0}\Big|_{P\in S} \end{cases}$$

Шар радиуса $R=a$

Рассмотрим в сфер. координатах

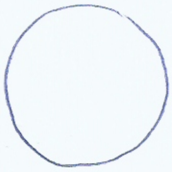
$Q = Q(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$ $\rho_0 = \rho(O,Q)$

$P(a, \varphi, \theta)$ $\rho_1 = \rho(O,M)$

$r_0 = \rho(P,Q)$

$r_1 = \rho(P,M)$

$a = \rho(O,P)$



т.к. $O, Q, M \in l$, то через O, Q, P, M проходит хотя бы 1 плоскость $\Rightarrow$ все результаты для окружности радиуса a верны и здесь, т.е

Возьмем M: $\rho_0\rho_1 = a^2$, тогда $\Delta OPQ \sim \Delta OMP$ из угла и пары подобных сторон, тогда $r_0 = \frac{\rho_0}{a} r_1$, и это верно для любых P лежащих на окружности, к-ую мы построили, но если P лежит ~~на~~ в другом месте, то результаты сохраняются (M фиксирована)

$\Rightarrow$ возьмем $V = -\frac{1}{4\pi}\frac{a}{\rho_0 r_1}$

$$\boxed{G(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \frac{a}{4\pi \rho_0 r_{PM}}}$$

Д/з 6

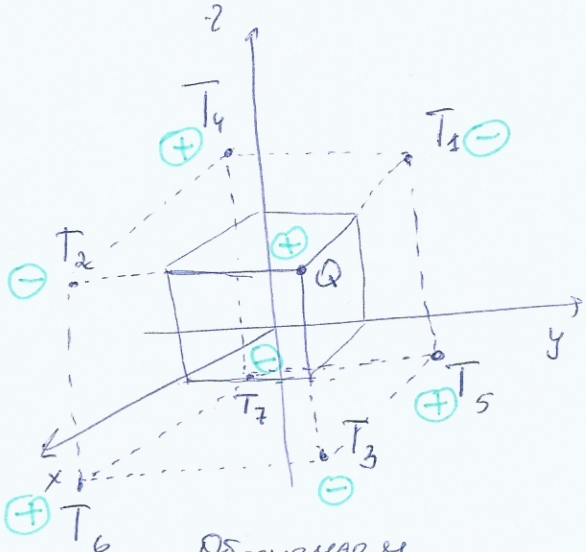
№ 2

а). $\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = -F & x, y, z > 0 \\ u|_S = f \\ u \underset{r\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \end{cases}$

$$u(Q) = -\iint\limits_S \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_p} f(p)\,ds + \iiint\limits_\Omega G(P,Q)F(P)\,dV =$$

$$= -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial(-x)} f(0,y,z)\,dy\,dz - \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial(-y)} f(x,0,z)\,dx\,dz - \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial(-z)} f(x,y\;)\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty G(P,Q)F(P)\,dx\,dy\,dz$$



$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \frac{1}{4\pi r_1} - \frac{1}{4\pi r_2} - \frac{1}{4\pi r_3} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi r_4} + \frac{1}{4\pi r_5} + \frac{1}{4\pi r_6} - \frac{1}{4\pi r_7}$$

Обозначаем

$r_1 = \rho(P, T_1)$
$r_2 = \rho(P, T_2)$
$r_3 = \rho(P, T_3)$
$r_4 = \rho(P, T_4)$
$r_5 = \rho(P, T_5)$
$r_6 = \rho(P, T_6)$
$r_4 = \rho(P, T_7)$

б) $\begin{cases} \Delta u(x,y) = -F, & x, y > 0 \\ u(x,0) = f_1(x) & 0 < x < \infty \\ u(0,y) = f_2(y) & 0 < y < \infty \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r\to\infty \end{cases}$

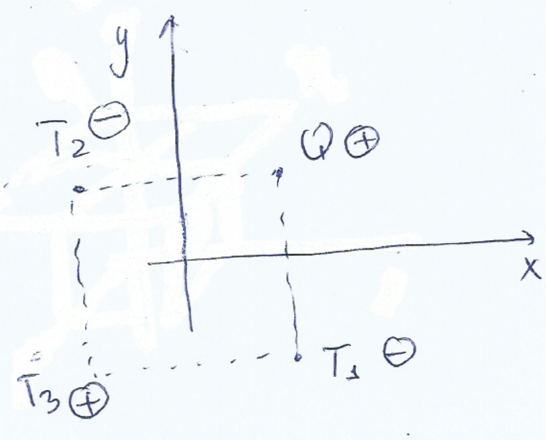
$$u(Q) = -\int\limits_\Gamma \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_p} f(p)\,dp + \iint\limits_S G(P,Q)F(P)\,dS =$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial(-y)}\Big|_{y=0} f_1(x)\,dx - \int_{+\infty}^0 \frac{\partial G}{\partial(-x)}\Big|_{x=0} f_2(y)\,dy +$$

$$+ \int_0^{+\infty}\int_0^\infty G(P,Q)F(P)\,dx\,dy$$

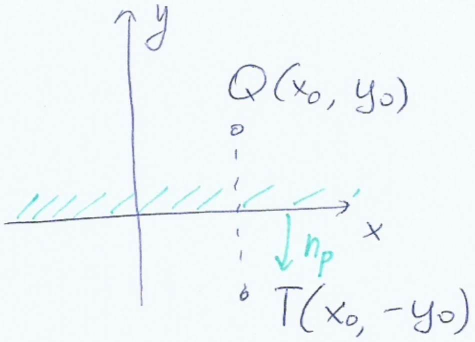
$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_3}$$



№ 3

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & -\infty < x < +\infty \quad y > 0 \\ u\big|_{y=0} = f(x) \end{cases}$$



$$u(Q) = -\int \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_p} f(P)\, dy$$

$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}} + V(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PT}}$$

$$r_{PQ} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \qquad r_{PT} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}$$

$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi}(-\ln r_{PQ}) + \frac{1}{2\pi}\ln r_{PT}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n_p} = \frac{\partial G}{\partial(-y)} = -\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial r_{PQ}}{\partial y} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_{PT}}\frac{\partial r_{PT}}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \cdot \frac{2(y-y_0)}{2\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}\frac{2(y+y_0)}{2\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n_p}\bigg|_{y=0} = -\frac{y_0}{2\pi((x-x_0)^2+y_0^2)} - \frac{y_0}{2\pi((x-x_0)^2+y_0^2)} = -\frac{y_0}{\pi((x-x_0)^2+y_0^2)}$$

$$u(Q) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{y_0}{\pi((x-x_0)^2+y_0^2)} f(x)\right) dx = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\, dx$$